

Vectores y geometría

Módulo, productos escalar, vectorial y mixto, rectas y planos, distancias y posiciones relativas.

01 Vectores y módulo

Flecha con dirección, sentido y longitud.

$$|v| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

- Unitario: $\hat{u} = v/|v|$. Componentes: $v = B - A$.

02 Operaciones básicas

Suma y producto por escalar.

$$u \pm v = (u_1 \pm v_1, u_2 \pm v_2, u_3 \pm v_3)$$

$$kv = (kv_1, kv_2, kv_3)$$

- Paralelos $\Leftrightarrow$ uno es múltiplo del otro.

03 Producto escalar

Da un número. Sirve para ángulos.

$$u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = |u| |v| \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{u \cdot v}{|u| |v|}$$

- Perpendiculares $\Leftrightarrow u \cdot v = 0$.

04 Producto vectorial

Da un vector $\perp$ a ambos. Área.

$$|u \times v| = |u| |v| \sin \theta$$

- $u \times v$ es **perpendicular** al plano de u y v .
- $|u \times v|$ = **área** del paralelogramo.
- Se calcula con el determinante simbólico (i,j,k) .

05 Producto mixto

Da un número. Volumen.

$$[u,v,w] = u \cdot (v \times w)$$

- = **volumen** del paralelepípedo (en valor absoluto).
- $=0 \Leftrightarrow$ los tres vectores son **coplanarios**.

06 Recta en el plano

Todas las formas equivalentes.

$$\text{punto-pendiente: } y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$\text{general: } Ax + By + C = 0$$

$$\text{continua: } \frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2}$$

07 Recta y plano (espacio)

Paramétricas y ecuación del plano.

$$\text{recta: } (x,y,z) = P + t \cdot v$$

$$\text{plano: } Ax + By + Cz + D = 0$$

- (A,B,C) es el **vector normal** al plano.

08 Distancias

Las fórmulas más pedidas.

$$\text{punto-recta (plano): } \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$\text{punto-plano: } \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

09 Posiciones relativas

¿Se cortan, son paralelas...?

- Dos rectas: **secantes**, **paralelas**, **coincidentes** o (en 3D) **se cruzan**.
- Recta-plano: contenida, paralela o secante.
- Se estudian con vectores directores/normales y rangos.

10 Ejemplo trabajado

Ángulo entre dos vectores.

$$u=(1,2,2), v=(2,0,1)$$

$$u \cdot v = 2 + 0 + 2 = 4; |u| = 3, |v| = \sqrt{5}$$

$$\cos \theta = \frac{4}{3\sqrt{5}} \Rightarrow \theta \approx 53,4^\circ$$