

Matrices y determinantes

Operaciones, determinantes, inversa, rango y discusión de sistemas con Cramer y Rouché-Frobenius.

01 Definición y tipos

Tablas de números $m \times n$.

- **Cuadrada** ($n \times n$), **fila**, **columna**.
- **Identidad** I : unos en la diagonal, ceros fuera.
- **Traspuesta** A^T : filas $\leftrightarrow$ columnas.
- Simétrica si $A = A^T$.

02 Suma y escalar

Elemento a elemento.

$$(A \pm B)_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$$

$$(kA)_{ij} = k \cdot a_{ij}$$

- Solo se suman matrices del **mismo tamaño**.

03 Producto de matrices

Fila por columna. ¡No conmuta!

$$(AB)_{ij} = \sum_k a_{ik} \cdot b_{kj}$$

- $A(m \times n) \cdot B(n \times p) \Rightarrow$ resultado $m \times p$ (las **internas coinciden**).
- En general **$AB \neq BA$** .

04 Determinante

2×2 y 3×3 (Sarrus).

$$2 \times 2: ad - bc$$

$$3 \times 3 \text{ (Sarrus): } \sum \text{ diagonales } \searrow - \sum \text{ diagonales } \swarrow$$

- Solo matrices **cuadradas** tienen determinante.

05 Propiedades del determinante

Atajos que ahorran cuentas.

- $|A^T| = |A|$, $|AB| = |A||B|$.
- Fila de ceros $\Rightarrow |A| = 0$.
- Dos filas iguales o proporcionales $\Rightarrow |A| = 0$.
- $|kA| = k^n |A|$ (n = orden).

06 Matriz inversa

Existe solo si $|A| \neq 0$.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (\text{Adj } A)^T$$

- $A \cdot A^{-1} = I$. **Regular** si $|A| \neq 0$; **singular** si $|A| = 0$.
- También por Gauss: $[A|I] \rightarrow [I|A^{-1}]$.

07 Rango

Nº de filas linealmente independientes.

- = orden del mayor menor con determinante $\neq 0$.
- Por Gauss: nº de filas no nulas al escalar.
- Clave para discutir sistemas.

08 Regla de Cramer

Sistemas con $|A| \neq 0$.

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$$

- A_i = A cambiando la columna i por el término independiente.
- Requiere sistema cuadrado y $|A| \neq 0$.

09 Rouché-Frobenius

Cuántas soluciones tiene el sistema.

- $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|B) = \text{nº incógnitas} \Rightarrow$ **solución única** (compatible determinado).
- $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|B)$ infinitas (indeterminado).
- $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A|B) \Rightarrow$ **sin solución** (incompatible).

10 Ejemplo: inversa 2x2

La fórmula exprés.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, |A| = ad - bc$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

intercambia diagonal, cambia signo a la otra