

Logaritmos y exponenciales

Definición, propiedades, cambio de base y cómo resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

01 Definición del logaritmo

El log es el exponente. Inversa de la potencia.

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$$

- Base $a > 0$, $a \neq 1$, y $x > 0$.
- $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$.

02 Propiedades del logaritmo

Convierten productos en sumas.

$$\log(x \cdot y) = \log x + \log y$$

$$\log_x \frac{y}{z} = \log_x y - \log_x z$$

$$\log(x^n) = n \cdot \log x$$

03 Propiedades de las potencias

Las reglas hermanas de los logs.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}, \quad a^0 = 1$$

04 Cambio de base

Para pasar a ln o $\log_{10}$.

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{\log x}{\log a}$$

- Útil en la calculadora, que solo tiene ln y log.

05 Ecuaciones exponenciales

Incógnita en el exponente.

- Iguala bases: $a^f = a^g \Rightarrow f=g$.
- Si no puedes: **toma logaritmos** a ambos lados.
- Cambio de variable si aparece a^x y a^{2x} .

$$2^x = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow x=3$$

06 Ecuaciones logarítmicas

Incógnita dentro del log.

- Agrupa en un solo log con las propiedades.
- Aplica la definición para quitar el log.
- **Comprueba:** el argumento debe ser >0 .

$$\log x + \log 2 = 1 \Rightarrow \log 2x = 1 \Rightarrow x=5$$

07 e y logaritmo natural

La base natural del cálculo.

$$\ln x = \log_e x, \quad e \approx 2,71828$$

$$\ln(e^x) = x, \quad e^{\ln x} = x$$

08 Gráficas y dominio

Reflejos una de otra en $y=x$.

- a^x : dominio $\mathbb{R}$, siempre >0 , pasa por $(0,1)$.
- $\log_a x$: dominio $x>0$, pasa por $(1,0)$.
- Si $a>1$ crecen; si 0

09 Aplicaciones

Dónde aparecen de verdad.

$$\text{interés: } C = C_0(1+i)^t$$

$$\text{decaimiento: } N = N_0 e^{-\lambda t}$$

- pH, decibelios, escala Richter... todo logarítmico.

10 Ejemplo trabajado

Exponencial tomando logaritmos.

$$3^x = 20$$

$$x \cdot \ln 3 = \ln 20 \quad (\ln \text{ a ambos lados})$$

$$x = \frac{\ln 20}{\ln 3} \approx 2,73$$