

Límites y continuidad

Las 7 indeterminaciones, infinitésimos equivalentes, L'Hôpital, continuidad y asíntotas.

01 Idea de límite

A qué valor se acerca f al acercarse x .

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

- Existe $\Leftrightarrow$ los **laterales** coinciden: $\lim_{x \rightarrow a^-} = \lim_{x \rightarrow a^+}$.
- No hace falta que f esté definida en a .

02 Álgebra de límites

Se reparten sobre las operaciones.

$$\lim(f \pm g) = \lim f \pm \lim g$$

$$\lim(f \cdot g) = \lim f \cdot \lim g$$

$$\lim \frac{f}{g} = \frac{\lim f}{\lim g} \quad (\text{si } \neq 0)$$

03 Las 7 indeterminaciones

Cuando no puedes sustituir directamente.

$$\frac{0}{0}$$

$$\frac{\infty}{\infty}$$

$$0 \cdot \infty$$

$$\infty - \infty$$

$$1^\infty$$

$$0^0$$

$$\infty^0$$

- Hay que **transformar** antes de calcular.

04 Cociente de polinomios

Mira solo los grados al ir a ∞ .

- grado arriba > abajo $\Rightarrow$ límite = $\pm\infty$.
- grado arriba < abajo $\Rightarrow$ límite = **0**.
- grados iguales $\Rightarrow$ **cociente de coeficientes** líderes.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+1}{2x^2-x} = \frac{3}{2}$$

05 Infinitésimos equivalentes

Sustituye cerca de $x \rightarrow 0$. ¡Muy útil!

cuando $x \rightarrow 0$	$\approx$
$\text{sen}x, \text{tan}x, \text{arcsen}x$	x
$1 - \cos x$	$\frac{x^2}{2}$
$e^x - 1, \ln(1+x)$	x

06 El número e

El límite que define e.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$$

Para 1^∞ : usa $\lim = e^{\lim g(f-1)}$.

07 Regla de L'Hôpital

Para $0/0$ e ∞/∞ : deriva arriba y abajo.

$$\lim \frac{f}{g} = \lim \frac{f'}{g'}$$

- Solo para **$0/0$** o **∞/∞** . Se puede repetir.
- Los demás casos: transfórmalos a un cociente primero.

08 Continuidad

f es continua si no «da saltos».

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

- **Evitable:** existe el límite pero $\neq f(a)$ (o no def.).
- **Salto:** laterales finitos distintos.
- **Asintótica:** algún lateral es $\pm\infty$.

09 Asíntotas

Rectas a las que la curva se pega.

- **Vertical** en $x=a$: $\lim_{x \rightarrow a} f = \pm\infty$.
- **Horizontal** $y=L$: $\lim_{x \rightarrow \infty} f = L$.
- **Oblicua** $y=mx+n$: $m = \lim \frac{f}{x}$, $n = \lim(f - mx)$.

10 Ejemplo trabajado

0/0 con equivalentes.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{x} \quad (0/0)$$

$$\operatorname{sen} 3x \approx 3x \Rightarrow \frac{3x}{x} = 3$$